

Introduction au calcul différentiel

Document 1/4 – Mathématiques 2026

Différentielle, applications fondamentales, dérivées directionnelles

Idée clé

Le calcul différentiel généralise la notion de dérivée aux fonctions de plusieurs variables, à valeurs dans des espaces vectoriels normés. Il permet d'approximer localement une fonction par une application linéaire (la différentielle). Ce premier document pose les fondations : définition de la différentielle, calcul sur les applications linéaires et bilinéaires, puis introduction des dérivées directionnelles et partielles.

Table des matières

1	La différentielle en un point	2
1.1	Définition	2
2	Différentielle d'applications fondamentales	2
2.1	Application linéaire	3
2.2	Application bilinéaire	3
3	Produit scalaire et norme : premières applications	4
4	Dérivée selon un vecteur et dérivées partielles	6
4.1	Dérivée selon un vecteur	6
4.2	Dérivées partielles	6

1 La différentielle en un point

1.1 Définition

Définition : Différentielle en un point

Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ où E et F désignent deux e.v.n. sur $\mathbb{R}$ de dimensions respectives p et n , et U un ouvert de E .

L'application f est dite **différentiable** en $a \in U$ s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que :

$$\forall h \in E, \quad f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|)$$

L'application linéaire est alors unique, on l'appelle **différentielle de f au point a** . On la note df_a ou $df(a)$.

Formule

Notation des restes : $o(h) = \|h\|\varepsilon(h)$ où $\varepsilon : E \rightarrow F$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0_F$.

Ainsi, le développement s'écrit :

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(\|h\|)$$

Lien / Remarque : Interprétation dans le cas $E = F = \mathbb{R}$

Lorsque $E = F = \mathbb{R}$, on retrouve la dérivée usuelle d'une fonction $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. En effet, une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est nécessairement de la forme $h \mapsto \lambda \cdot h$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. La différentielle df_a est donc l'application :

$$df_a : h \longmapsto f'(a) \cdot h$$

où $f'(a)$ est la dérivée usuelle de f en a . Le développement limité s'écrit alors :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + o(|h|)$$

ce qui est exactement la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en dimension 1.

Ainsi, la différentielle df_a **généralise** la dérivée $f'(a)$: en dimension 1, elle se réduit à la multiplication par le nombre $f'(a)$, tandis qu'en dimension supérieure, elle devient une application linéaire à part entière (représentée par une matrice jacobienne).

2 Différentielle d'applications fondamentales

Avant d'énoncer les propriétés générales de la différentielle, il est essentiel de savoir calculer la différentielle de quelques applications fondamentales. Ces résultats serviront de briques élémentaires pour tous les calculs ultérieurs.

2.1 Application linéaire

Formule : Application linéaire

Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire continue entre deux e.v.n.

Alors L est différentiable en tout point $a \in E$ et sa différentielle est **égale à L elle-même** :

$$\forall a \in E, \quad dL_a = L$$

Démonstration : Pour tout $h \in E$, on a exactement $L(a + h) = L(a) + L(h)$, donc le reste est nul (pas seulement un $o(\|h\|)$). L'application linéaire tangente est donc L elle-même.

2.2 Application bilinéaire

Formule : Application bilinéaire

Soit $B : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire continue entre e.v.n.

Alors B est différentiable en tout point $(a, b) \in E \times F$ et :

$$dB_{(a,b)}(h, k) = B(h, b) + B(a, k)$$

Démonstration : Par bilinéarité :

$$B(a + h, b + k) = B(a, b) + B(h, b) + B(a, k) + B(h, k)$$

Le terme $B(h, k)$ est le reste. Comme B est continue, il existe $C > 0$ tel que $\|B(h, k)\| \leq C\|h\|\|k\| = o(\|(h, k)\|)$, ce qui conclut.

Lien / Remarque : Détail sur le reste $B(h, k) = o(\|(h, k)\|)$

Pourquoi le terme $B(h, k)$ est-il un $o(\|(h, k)\|)$?

En dimension finie, toute application bilinéaire continue B admet une **norme d'opérateur** finie :

$$C = \|B\| = \sup_{\substack{\|a\| \leq 1 \\ \|b\| \leq 1}} \|B(a, b)\| < +\infty$$

(ce supremum est atteint car l'ensemble est compact et B continue).

Pour tout (h, k) non nul, on factorise :

$$B(h, k) = \|h\| \cdot \|k\| \cdot B\left(\frac{h}{\|h\|}, \frac{k}{\|k\|}\right)$$

Les vecteurs normalisés $\frac{h}{\|h\|}$ et $\frac{k}{\|k\|}$ étant de norme 1, on obtient :

$$\|B(h, k)\| \leq C\|h\|\|k\|$$

En munissant $E \times F$ de la norme $\|(h, k)\| = \max(\|h\|, \|k\|)$, on a $\|h\| \leq \|(h, k)\|$ et $\|k\| \leq \|(h, k)\|$, donc :

$$\|B(h, k)\| \leq C\|(h, k)\|^2 \implies \frac{\|B(h, k)\|}{\|(h, k)\|} \leq C\|(h, k)\| \xrightarrow{(h, k) \rightarrow 0} 0$$

Ce qui signifie précisément que $B(h, k) = o(\|(h, k)\|)$.

3 Produit scalaire et norme : premières applications

Formule : Produit scalaire

Soient $f, g : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux applications différentiables en $a \in U$.

L'application $\varphi : x \mapsto \langle f(x), g(x) \rangle$ est différentiable en a et :

$$d\varphi_a(h) = \langle df_a(h), g(a) \rangle + \langle f(a), dg_a(h) \rangle$$

Démonstration : Le produit scalaire $B(u, v) = \langle u, v \rangle$ est une application bilinéaire continue. On a $\varphi(x) = B(f(x), g(x))$.

En appliquant la formule de la différentielle d'une bilinéaire composée avec $x \mapsto (f(x), g(x))$ (dont la différentielle est $h \mapsto (df_a(h), dg_a(h))$), on obtient directement le résultat.

Formule : Norme euclidienne

Soit E un espace euclidien. La fonction $N : x \mapsto \|x\|$ est différentiable en tout point $a \neq 0_E$ et :

$$dN_a(h) = \frac{\langle a, h \rangle}{\|a\|}$$

Démonstration : On écrit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. En posant $\varphi(x) = \langle x, x \rangle$ et $S(t) = \sqrt{t}$, on a $N = S \circ \varphi$.

Par la formule du produit scalaire ci-dessus : $d\varphi_a(h) = 2\langle a, h \rangle$.

Par la règle de composition : $dN_a(h) = S'(\|a\|^2) \cdot d\varphi_a(h) = \frac{1}{2\|a\|} \cdot 2\langle a, h \rangle = \frac{\langle a, h \rangle}{\|a\|}$.

Attention

La fonction $x \mapsto \|x\|$ n'est **pas différentiable** en 0.

En effet, si elle l'était, sa différentielle en 0 serait une application linéaire L telle que $\|h\| = L(h) + o(\|h\|)$. En remplaçant h par $-h$, on obtiendrait $\|h\| = -L(h) + o(\|h\|)$, donc $L(h) = o(\|h\|)$, ce qui implique $L = 0$. Mais alors $\|h\| = o(\|h\|)$, absurde pour $h \neq 0$.

Géométriquement, la norme présente une **pointe** en 0 (comme la fonction $|x|$ en dimension 1).

Lien / Remarque : Cas particulier en dimension 1

En dimension 1 ($E = \mathbb{R}$), la norme est la valeur absolue $x \mapsto |x|$. On retrouve le résultat classique :

- Pour $a > 0$: $d|x|_a(h) = h$ (car $|x| = x$ au voisinage de a).
- Pour $a < 0$: $d|x|_a(h) = -h$ (car $|x| = -x$ au voisinage de a).
- En $a = 0$: non différentiable (la célèbre « pointe » de la fonction valeur absolue).

La formule $d|x|_a(h) = \frac{a \cdot h}{|a|} = \text{signe}(a) \cdot h$ pour $a \neq 0$ est bien cohérente avec ces cas.

Autres propriétés algébriques :

- Si f est différentiable en a , alors f est continue en a .
- Si f et g sont différentiables en a , alors $f + \mu g$ aussi et : $d(f + \mu g)_a = df_a + \mu dg_a$.

Définition : Application de classe C^1

- f est dite **différentiable sur** U si f est différentiable en tout point de U . On appelle alors différentielle de f l'application :

$$df : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F), \quad a \mapsto df_a$$

- L'application $f : U \subset E \rightarrow F$ est dite de **classe** C^1 sur U si f est différentiable sur U et si sa différentielle df est continue sur U .

Si f est de classe C^1 sur U , on dira aussi que f est continûment différentiable sur U .

4 Dérivée selon un vecteur et dérivées partielles

4.1 Dérivée selon un vecteur

Définition : Dérivée selon un vecteur

Soit $u \in E$. L'application f est dite **dérivable en a selon le vecteur u** si la fonction $t \mapsto f(a + tu)$ est dérivable en 0. On pose dans ce cas :

$$D_u(f)(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}$$

Lien / Remarque

Lorsqu'une fonction est différentiable, elle est dérivable dans toutes les directions.

Proposition : Si f est différentiable en a , alors f est dérivable en a selon u pour tout vecteur $u \in E$ et $D_u(f)(a) = df_a(u)$.

4.2 Dérivées partielles

On munit désormais E d'une base orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$.

Définition : Dérivées partielles

Pour $j \in \{1, \dots, p\}$, on appelle **dérivée partielle en a d'indice j** la dérivée de f en a suivant e_j , c'est-à-dire :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}$$

Si f est différentiable en a , alors les dérivées partielles existent et :

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = df_a(e_j)$$

Idée clé : À retenir de ce document

1. La différentielle df_a est l'**unique application linéaire** qui approche f au voisinage de a : $f(a + h) = f(a) + df_a(h) + o(\|h\|)$.
2. Pour une application **linéaire** L , on a $dL_a = L$.
3. Pour une application **bilinéaire** B , on a $dB_{(a,b)}(h, k) = B(h, b) + B(a, k)$.
4. La **dérivée selon u** est $D_u(f)(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}$.
5. Les **dérivées partielles** sont les dérivées selon les vecteurs de base : $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = df_a(e_j)$.