

Séries de Laurent et Théorème des Résidus

Analyse Complexe

Cours complet

Idée clé

Ce cours présente les séries de Laurent, la notion de résidu et le théorème des résidus, outils fondamentaux de l'analyse complexe pour le calcul d'intégrales.

Table des matières

1	Séries de Laurent	2
1.1	Définition	2
1.2	Classification des singularités isolées	3
2	La Notion de Résidu	3
2.1	Définition	3
3	Techniques de Calcul des Résidus	4
3.1	Par développement en série de Laurent	4
3.2	Pôle simple : formule g/h	5
3.3	Pôle d'ordre m : formule de la dérivée	6
4	Le Théorème des Résidus	7
4.1	Applications	7
5	Application Majeure : Intégrales Impropres Réelles	7
5.1	Objectif	7
5.2	Méthode	8
6	Récapitulatif des Formules	8
7	Méthodologie Générale	8
8	Ce qu'apporte le calcul des résidus	9

1 Séries de Laurent

1.1 Définition

Définition

Soit f une fonction analytique dans une **couronne** (annulus) :

$$r < |z - z_0| < R$$

Alors f admet un développement en **série de Laurent** unique :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}}_{\text{Partie principale}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{Partie régulière (analytique)}}$$

où les coefficients sont donnés par :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Idée clé

Lien avec les séries entières (Taylor). Une série entière n'est qu'un **cas particulier** de la série de Laurent :

- Si f est analytique en z_0 (pas de singularité), alors $r = 0$ et **tous les coefficients de la partie principale sont nuls** ($a_{-n} = 0$ pour $n \geq 1$).
- La série de Laurent se réduit à la série de Taylor : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.
- Dans ce cas, le résidu est nul ($a_{-1} = 0$) et l'intégrale sur un contour fermé vaut 0 (théorème de Cauchy).

La série de Laurent est donc l'outil **indispensable** pour capturer mathématiquement ce qui se passe au voisinage d'une singularité !

Comparaison : Série entière vs Série de Laurent

Caractéristique	Série entière (Taylor)	Série de Laurent
État de f en z_0	Analytique (lisse)	Singularité
Domaine de validité	Disque $ z - z_0 < R$	Couronne $r < z - z_0 < R$
Puissances négatives ?	Non ($a_{-n} = 0$)	Oui (partie principale)
Résidu (a_{-1})	Toujours 0	Peut être $\neq 0$
Intégrale sur contour	0 (Cauchy)	$2\pi i \times a_{-1}$ (Résidus)

Attention

Une même fonction peut avoir plusieurs séries de Laurent différentes ! Contrairement aux séries de Taylor, une fonction $f(z)$ peut avoir **plusieurs** développements de Laurent selon la couronne choisie autour de z_0 .

Exemple : Pour $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ autour de $z_0 = 0$:

- Une série valide pour $0 < |z| < 1$.
- Une **autre** série valide pour $|z| > 1$.

Dans chaque couronne, la série est unique, mais elles diffèrent d'une couronne à l'autre. Le point z_0 est le **centre** de la couronne (et de la série).

1.2 Classification des singularités isolées

Type	Partie principale	Exemple
Singularité effaçable	Nulle ($a_{-n} = 0 \forall n$)	$\frac{\cos z - 1}{z^2}$ en $z = 0$
Pôle d'ordre m	Finie, $a_{-m} \neq 0$	$\frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ en $z = 1$ (ordre 2)
Singularité essentielle	Infinie	$\sin\left(\frac{1}{z}\right), e^{3/z}$ en $z = 0$

TABLE 1 – Classification des singularités

2 La Notion de Résidu

2.1 Définition

Définition

Le **résidu** de f en une singularité isolée z_0 est le coefficient a_{-1} de la série de Laurent :

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1}$$

C'est le coefficient de $\frac{1}{z-z_0}$ dans le développement de Laurent.

Idée clé

Pourquoi seul le terme en $1/(z - z_0)$ contribue ? Quand on développe f en série de Laurent :

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

Lors de l'intégration sur un contour fermé C :

- **Tous les termes s'annulent** (intégrale nulle pour $(z - z_0)^n$ avec $n \neq -1$).
- **Sauf le terme en $1/(z - z_0)$** dont l'intégrale vaut $2\pi i$.

$\Rightarrow$ Seul le coefficient a_{-1} (le résidu) contribue à l'intégrale !

Idée clé

Le résidu est crucial car lors de l'intégration sur un contour fermé C entourant z_0 :

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, z_0)$$

Tous les autres termes de la série s'annulent !

Exemple

Pour $f(z) = e^{3/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!} z^{-k}$, le coefficient de $1/z$ est $3^1/1! = 3$, donc :

$$\int_{|z|=1} e^{3/z} dz = 2\pi i \cdot 3 = 6\pi i$$

3 Techniques de Calcul des Résidus

3.1 Par développement en série de Laurent

Calcul

On développe f en série et on lit le coefficient de $1/z$.

Exemple

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$$

$$\begin{aligned}\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \\ f(z) &= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{5!} z - \dots \\ \text{Res}(f, 0) &= -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Exemple

- $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \dots \implies \text{Res}(f, 0) = 0$ (pas de terme en $1/z$)
- $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \dots \implies \text{Res}(f, 0) = 1$
- $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2} = -\frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \dots \implies \text{Res}(f, 0) = 0$ (singularité effaçable)

3.2 Pôles simple : formule g/h

Formule

Si $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, où g et h sont analytiques près de z_0 , et h a un **zéro simple** en z_0 (i.e. $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$), alors :

$$\boxed{\text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}}$$

Exemple

Calcul de $\int_{|z|=2} \tan z \, dz$

On a $f(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$, avec $g(z) = \sin z$ et $h(z) = \cos z$.

Les singularités à l'intérieur de $|z| = 2$ sont $z = \pm \frac{\pi}{2}$.

En $z = \frac{\pi}{2}$:

$$\text{Res}\left(f, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{g(\pi/2)}{h'(\pi/2)} = \frac{\sin(\pi/2)}{-\sin(\pi/2)} = -1$$

En $z = -\frac{\pi}{2}$:

$$\text{Res}\left(f, -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(-\pi/2)}{-\sin(-\pi/2)} = -1$$

Donc :

$$\int_{|z|=2} \tan z \, dz = 2\pi i [-1 + (-1)] = -4\pi i$$

3.3 Pôle d'ordre m : formule de la dérivée

Formule

Si z_0 est un **pôle d'ordre** m de f , alors :

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$

Exemple

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$$

$z = 1$ est un pôle d'ordre $m = 2$.

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 1) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{z-3} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-1}{(z-3)^2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$z = 3$ est un pôle simple ($m = 1$) :

$$\text{Res}(f, 3) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{4}$$

4 Le Théorème des Résidus

Théorème

Soit D un domaine simplement connexe, f analytique dans D sauf en des singularités isolées $z_1, \dots, z_n$. Soit C une courbe fermée simple dans D (orientée **anti-horaire**), sans singularité sur C . Alors :

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

où la somme porte sur les singularités **à l'intérieur** de C .

Idée clé

L'intégrale de f le long d'un contour fermé ne dépend **que des résidus** aux singularités enfermées à l'intérieur du contour.

4.1 Applications

Exemple

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$$

Contour C_1 (entoure seulement $z = 1$) :

$$\int_{C_1} f(z) dz = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi i}{2}$$

Contour C_2 (entoure $z = 1$ et $z = 3$) :

$$\int_{C_2} f(z) dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 0$$

Exemple

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

Singularités : $z = \pm i$.

Contour	Singularités incluses	Résultat
C_1 (entoure i)	i	$2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2}i\right) = \pi$
C_2 (entoure $-i$)	$-i$	$2\pi i \cdot \left(\frac{1}{2}i\right) = -\pi$
C_3 (entoure les deux)	i et $-i$	$2\pi i \left(-\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}i\right) = 0$
C_4 (n'entoure rien)	aucune	0

5 Application Majeure : Intégrales Impropres Réelles

5.1 Objectif

Évaluer $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$

5.2 Méthode

Calcul

Étape 1 : La fonction est paire, donc :

$$\int_0^R \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx$$

Étape 2 : On considère $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ et on intègre sur un demi-cercle supérieur.

Étape 3 : Seul $z = i$ est à l'intérieur.

$$\text{Res} \left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}, i \right) = \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{1}{2ei}$$

Étape 4 : Par le lemme de Jordan, l'intégrale sur le demi-cercle tend vers 0.

Étape 5 : Conclusion :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{e} = \boxed{\frac{\pi}{2e}}$$

6 Récapitulatif des Formules

Résumé des formules essentielles

Situation	Formule du résidu
Série de Laurent	$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1}$
Pôle simple $f = g/h$	$\text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$
Pôle simple général	$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$
Pôle d'ordre m	$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$
Théorème des résidus	$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$

7 Méthodologie Générale

Idée clé

Pour calculer une intégrale $\int_C f(z)dz$:

1. **Identifier** les singularités de f
2. **Déterminer** lesquelles sont à l'intérieur de C
3. **Classer** chaque singularité (effaçable, pôle d'ordre m , essentielle)
4. **Calculer** les résidus avec la formule adaptée
5. **Appliquer** le théorème : $\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum \text{Res}$

Attention

Dans les blocs de code, ne jamais utiliser d'accents ! Le package `listings` ne les gère pas. Utilisez l'anglais ou les caractères ASCII.

8 Ce qu'apporte le calcul des résidus

Idée clé

L'idée géniale : Au lieu de calculer directement une intégrale complexe (souvent très difficile), on calcule simplement **la somme des résidus** à l'intérieur du contour, puis on multiplie par $2\pi i$.

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum \text{Res}(f, z_k)$$

Le théorème des résidus transforme un **problème d'analyse** (intégrale difficile) en un **problème algébrique** (calculer quelques coefficients).

Exemple

- **Intégrales réelles impossibles** autrement : $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}$
- **Intégrales trigonométriques** complexes
- **Sommes de séries** infinies
- **Transformées de Fourier/Laplace** inverses